

БӨРІХАНОВ МЕЙІРХАН БАТЫРХАНҰЛЫ

БӨЛШЕК РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ РЕГУЛЯР ЖӘНЕ СИНГУЛЯР ШЕШІМДЕРІН ЗЕРТТЕУ

«БД060100-Математика» мамандығы бойынша философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертацияға

АҢДАТПА

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. Бөлшек ретті дифференциалдық операторлар әртүрлі жолдармен енгізіледі. Осыған байланысты бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулерді және шеттік есептерді шешу кезінде енгізілген операторға тәуелді түрлі тәсілдерді меңгеру қажет болады.

Сонымен қатар бөлшек ретті интегро-дифференциалдық операторлардың қолданылуы, функциялар теориясы мен шеттік есептердің белгілі мәселелерін тереңірек ұғындыруға және есептердің ауқымды шеңберін қамтитын шешімдердің жаңа класын алуға септігін тигізеді.

1827 жылы шотландиялық оқымысты Р. Броун су тамшысының тозаң бөлшектерінің хаотикалық қозғалысын бақылай отырып, жаңа қозғалыс типін ашты. Кейінірек оның атымен броундық қозғалыс деп аталды. Броундық қозғалыстың негізгі заңы – гаусс пішінінің диффузиялық пакеті және оның $t^{1/2}$ заңы бойынша таралуы – Ньютон заңдары сияқты әмбебап болып көрінді (дегенмен, ондай іргелі емес екені анық). Алайда, 1926 ж. Л. Ричардсон турбулентті ортада диффузиялық пакеттің $t^{3/2}$ заңы бойынша таралуын анықтады. Кейінірек бұл процесс супердиффузия деп аталды. Нормал диффузиядан ерекшеленетін басқа типтегі диффузия – субдиффузия (баяулатылған диффузия) - перколяциялық процестерде, релаксация материалында, полимерлі құрылымдарда, басқа түсіндірулерде және жүйелерде анықталды. Тек қана кеңею заңы ғана емес, диффузиялық пакеттің формасының өзі де және осы процессті сипаттайтын теңдеудің типі де қарапайым түріндегіден өзгеше болатындығы айқындалды. Бұл пайда болу класы аномалды диффузия немесе таңғажайып кинетика деп аталды.

Өткен ғасырдың 90-шы жылдары аномалды диффузия теориясындағы негізгі рөлді бөлшек ретті туынды қатысқан теңдеулер алатындығы түсінікті болды. Сол себепті бөлшек ретті туынды қатысқан теңдеулер үшін қойылған әр түрлі есептерді зерттеу өзекті және бір жағынан қолданбалы ғылым болып табылады.

Жалпы алғанда, дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориясын зерттеуде кеңінен қолданылатын, негізгі танымал әдістердің бірі максимум және минимум қағидасы болып табылады. Бұл қағида есептің шешімдері жайында ақпаратты олардың нақты формалары туралы мәліметтерді білмей-ақ алуға мүмкіндік береді.

Соңғы кездерде бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулер теориясының дамуына байланысты максимум қағидасына ерекше назар аударыла бастады.

Математикалық физика саласындағы бейсызықты есептер теориясының өзекті бағыттарының бірі глобалды шешілімділік және шешімнің ақырлы уақытта қирауын зерттеу болып табылады.

Бейсызықты теңдеулердің глобалды шешілімділігінің классикалық теориясы негізінен бастапқы және шекаралық есептердің шешілуін қамтамасыз ететін жеткілікті шарттарға негізделген. Бұл жаңа құбылыс Фуджитаның классикалық жұмысынан бастау алып, салыстырмалы түрде жақын арада пайда болды және шешімнің қирауы (blow-up) деген атау алды.

1966 жылы жапондық математик Х.Фуджита бейсызықты жылу теңдеуі үшін глобалды шешімнің бар болуын дәлелдеді және шешімнің ақырлы уақытта қирауының критикалық көрсеткішін анықтады. Оның құрметіне, мұндай көрсеткіш «Фуджитаның критикалық көрсеткіші» деп аталды.

Бүгінгі таңда көптеген еңбектерде Фуджита нәтижелерінің әртүрлі жалпылаулары зерттелген. Сондай-ақ, Фуджита типті критикалық көрсеткіштер диффузия теңдеуінің бөлшек ретті аналогтары мен интегралды бейсызықты диффузия теңдеуі үшін зерттелінген.

Бұл таңдалған зерттеу тақырыбының өзектілігі жоғарыда келтірілген осы бағыттағы зерттеулердің қарқынды дамуы және де қазіргі уақытта бөлшек ретті және интегро-дифференциалдық теңдеулер бойынша көптеген жұмыстардың Web of Science, Scopus, MathSciNet және басқа да беделді халықаралық базаларында келтірілуі дәлел бола алады.

Диссертациялық жұмыстың мақсаты мен міндеті. Бөлшек ретті сызықты және бейсызықты дифференциалдық теңдеулер және теңдеулер жүйесінің регуляр және сингуляр шешімдерін зерттеу.

Диссертациялық жұмыстың мақсатына жету үшін келесі зерттеудің негізгі міндеттері қарастырылған:

- Риман - Лиувилль, Капуто - Фабрицио және жалпыланған Капуто - Фабрицио мағынасындағы бөлшек ретті дифференциалдық операторлар қатысқан диффузия теңдеуі үшін максимум және минимум қағидасын зерттеу;
- Сызықты бөлшек ретті диффузия теңдеуі үшін Дьюамел принципінің аналогын алу;
- Бейлокалды және салмақты бейсызықты диффузия теңдеулері мен теңдеу жүйелерінің локалды шешімдерінің бар болуын зерттеу;
- Экспоненциалды бейсызықты бөлшек ретті диффузия теңдеуі және теңдеулер жүйесінің локал және глобал шешілімділігін зерттеу;
- Полинималды бейсызықты бөлшек ретті диффузия теңдеуі мен теңдеулер жүйесі үшін глобал шешімнің болмау шарттарын, яғни Фуджита типті критикалық көрсеткіштерін табу;

Зерттеу объектісі. Риман - Лиувиль, Капуто - Фабрицио және жалпыланған Капуто - Фабрицио мағынасындағы бөлшек ретті дифференциалдық операторлар қатысқан бастапқы - шеттік шарттармен берілген диффузия теңдеуі болып табылады. Сонымен қатар экспоненциалды және полиномиалды бейсызықтылықпен берілген бөлшек ретті интегро - дифференциалдық теңдеулер және теңдеулер жүйесін қарастыру.

Зерттеу әдістері. Диссертациялық жұмыстың есептерін шешу кезінде дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориясының және функционалды талдау теориясының классикалық әдістері негізге алынды.

Бейсызықты интегро-дифференциалдық диффузия теңдеулерінің шешімдерін зерттеу кезінде дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер және бейсызықты анализ теориясының әртүрлі әдістері қолданылды.

Қойылған есептерді шешу мақсатында жоспарланған кейбір әдістерді келтіреміз.

Атап айтқанда, локал шешімнің бар болуын дәлелдеу үшін:

- Интегралды теңдеулерге келтіру әдісі және Дьюамел принципі;
- Қысып бейнелеу әдістері;
- Бөлшек ретті есептеу әдістері;
- Жылжымайтын нүктелер туралы теоремалар арқылы жүзеге

асады.

Глобал шешімдердің болуы келесі әдістердің көмегімен дәлелденеді:

- Іргелі шешім әдісі және Грин функция әдісі;
- Бөлшек ретті туындыларға арналған теңсіздіктер;
- Жылжымайтын нүктелер туралы теоремалар;

Шешімнің бұзылуын зерттеу үшін:

- Сынақ функциялар әдісі қолданылады.

Зерттеудің ғылыми жаңалығы. Бұл диссертациялық жұмыста зерттелген сызықты және бейсызықты бөлшек ретті туынды қатысқан математикалық физиканың мәселелері жаңа болып табылады, сонымен қатар классикалық сызықты есептерді, сондай-ақ маңызды қолданыстары бар бейсызықты есептер класын қамтиды. Қарастырылып отырған мәселелер негізінен зерттелінбеген немесе дербес жағдайлары үшін ғана көрсетілген. Сондықтан, ғылыми-зерттеу жұмысы белгілі нәтижелерді жалпылайды.

Зерттеудің тәжірибиелік және теориялық маңызы.

Зерттеу тақырыбы негізінен теориялық және фундаменталды сипатқа ие. Сол себепті жұмыстың ғылыми маңыздылығы дифференциалды операторлар теориясының терең, заманауи нәтижелерін қолдану және зерттеу мен талдаудың жаңа өзіндік әдістерін құрумен байланысты болып табылады.

Жарияланымдар. Диссертация тақырыбы бойынша 12 жұмыс, соның ішінде 2 жарияланым Web of Science және Scopus деректер қорлары бойынша импакт-факторы бар шетелдік журналдарда, 3 жарияланым ҚР БҒМ Білім және ғылым саласындағы бақылау комитетімен ұсынылған тізімге кіретін ғылыми басылымдарда, 2 жарияланым қолжазба құқығында, 1 жарияланым

отандық журналда және 4 жарияланым халықаралық ғылыми конференция материалдарында жарияланды:

Рейтингтік ғылыми журналдар

1 M. Borikhanov, M. Kirane, B. T. Torebek. Maximum principle and its application for the nonlinear time-fractional diffusion equations with Cauchy-Dirichlet conditions //Applied Mathematics Letters, - 2018. - V. 81, - P. 14-20. Web of Science Impact factor=3,8(Q1), JIF Percentile=98, Scopus SJR=1,4(Q1), CiteScore=5,7, Scopus Percentile=94.

2 Borikhanov M., Torebek B. Local existence and global nonexistence results for an integro-differential diffusion system with nonlocal nonlinearities // Mathematical Methods in the Applied Sciences - 2020. - P. 1796-1811. doi.org/10.1002/mma.6878 Web of Science Impact factor=1,6(Q2), JIF Percentile=74, Scopus SJR=0,6(Q1), CiteScore=2,8, Scopus Percentile=87.

ҚР БҒМ Білім және ғылым саласындағы бақылау комитетімен ұсынылған тізімге кіретін ғылыми басылымдар

1 M. Borikhanov, B. T. Torebek. Maximum principle and its application for the sub-diffusion equations with Caputo-Fabrizio fractional derivative //Математический журнал. - 2018. - Т. 18, № 1. - С. 43-52.

2 Borikhanov M., Torebek B. Critical exponents of Fujita type for certain time-fractional diffusion equations // International Journal of Mathematics and Physics. - 2018. - V. 9, No. 2. - P. 43-49.

3 M. B. Borikhanov. Mild solution to integro-differential diffusion system with nonlocal source. //Kazakh Mathematical Journal. - 2020. - Vol. 20, No. 1. - P. 18-26.

Қолжазба құқығында

1 Borikhanov M., Torebek B. Local and blowing-up solutions for an integro-differential diffusion equation and system. arXiv:1910.06989.

2 M. Borikhanov, M. Kirane, B. T. Torebek. Globally unsolvability of integro-differential diffusion equations with exponential nonlinearity. Researchgate. DOI: 10.13140/RG.2.2.18342.14409

Отандық басылым

1 Borikhanov M.B. Critical exponents of Fujita type for system of time-fractional diffusion equations. // Известия МКТУ имени Х.А.Ясави, Серия мат., физ., инф. - 2018. - Т. 3, №6. - С. 23-35.

Халықаралық конференция материалдары

1 M. B. Borikhanov. Maximum principle and its application for the nonlinear time-fractional Stokes's first problem // Traditional International April scientific conference in honor of the Science Day. Almaty, April 10, - 2018. - P. 27.

2 Borikhanov M.B. Maximum principle and its application for the nonlinear time-fractional diffusion equations // Современные методы теории краевых

задач: материалы международной конференции «Понтрягинские чтения - ХХІХ», посвященной 90 - летию Владимира Александровича Ильина (2-6 мая 2018 г.) - 2018. Москва. - С. 251-252.

3 M. Borikhanov. Duhamel principle for the time-fractional diffusion equation in unbounded domain // Fourth International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2018). - 2018. 6-9 September. Near East University, Lefkosa (Nicosia), Mersin 10, Turkey. - P. 129.

4 Borikhanov M. Local existence and global non-existence for the integro-differential diffusion equation // International Conference “Actual Problems of Analysis, Differential Equations and Algebra”. - 2019. Nur-Sultan - P. 86.

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, 3 тараудан, қорытынды және әдебиеттер тізімінен тұрады.

Жұмыстың көлемі - 102 бет. Әдебиеттер саны - 55.

Диссертацияның негізгі мазмұны.

Бірінші тарауда, $D_{0t}^{1-\alpha}$ - Риман - Лиувилль бөлшек ретті туынды қатысқан диффузия теңдеуі үшін келесі есеп қарастырылады

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta_x D_{0t}^{1-\alpha} u(x,t) + F(x,t), & (x,t) \in (0,a) \times (0,T] = \Omega, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,a], \\ u(0,t) = \lambda(t), \quad u(a,t) = \mu(t), & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

мұндағы $0 < \alpha < 1$, $F(x,t)$, $\varphi(x)$ үздіксіз функциялар.

Сонымен қатар ${}_{CF} \mathbf{D}_{0t}^{1-\alpha}$ - Капуто - Фабрицио мағынасындағы бөлшек ретті дифференциалдық операторы бар диффузия теңдеуі

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} {}_{CF} \mathbf{D}_{0t}^{1-\alpha} u(x,t) + F(x,t), & (x,t) \in (0,a) \times (0,T] = \Omega, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,a], \\ u(0,t) = u(a,t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

мұндағы $0 < \alpha < 1$, $F(x,t)$, $\varphi(x)$ функциялары үздіксіз және $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$.

${}_{CF}^* \mathbf{D}_{0t}^{1-\alpha}$ - жалпыланған Капуто - Фабрицио мағынасындағы уақыт бойынша бөлшек ретті диффузия теңдеуі

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} {}_{CF}^* \mathbf{D}_{0t}^{1-\alpha} u(x,t) + F(x,t), & (x,t) \in (0,a) \times (0,T] = \Omega, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,a], \\ u(0,t) = \lambda(t), \quad u(a,t) = \mu(t), & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

мұндағы $0 < \alpha < 1$, $F(x, t)$, $\varphi(x)$, $\lambda(t)$, $\mu(t)$ функциялары үздіксіз және $\lambda(t)$, $\mu(t)$ кемімейтін функциялар. Бұл есептер үшін максимум және минимум қағидалары зерттелген.

Алынған нәтижелердің қолданысы ретінде сызықты және бейсызықты диффузия теңдеуінің шешімдерінің жалғыздығы, сонымен қатар шешімнің бастапқы берілгендерден үздіксіз тәуелді болатындығы дәлелденді.

Екінші тарауда, уақыт бойынша бөлшек ретті диффузия теңдеуі үшін

$$\begin{cases} u_t(x, t) - \Delta_x D_{0t}^{1-\alpha} u(x, t) = f(x, t), & 0 < \alpha < 1, \quad x \in R^N, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in R^N, \end{cases}$$

Дьюамел принципінің аналогы алынды. Мұндағы $u_0(x)$ және $f(x, t)$ берілген функциялар.

Сонымен қатар бейлокалды және салмақты бейсызықты диффузия теңдеулері мен теңдеулер жүйелерінің локалды шешімдерінің бар болуы зерттелді.

Дьюамель принципі аналогы нәтижесін, уақыт бойынша бөлшек ретті диффузия теңдеуі Грин функциясының қасиеттерін және Банахтың жылжымайтын нүкте теоремасын ескере отырып есептің жалғыз интеграл локал шешімінің бар болатындығы дәлелденді.

Үшінші тарауда полиномалды бейсызықты бөлшек ретті диффузия теңдеуі мен теңдеулер жүйесі үшін глобал шешімнің қирау (жарылу) шарттары, яғни Фуджита типті критикалық көрсеткіштерінің мәні анықталды.

Сынақ функциялар әдісі, сонымен қатар бөлшек ретті есептеу және бөлшек ретті туындыларға арналған теңсіздіктер арқылы берілген теңдеу мен теңдеулер жүйесінің Фуджита типті критикалық көрсеткіштері табылды.

Экспоненциалды бейсызықтылықпен берілген бөлшек ретті диффузия теңдеуі және теңдеулер жүйесінің глобал шешімінің болмауы зерттелді. Аталған теңдеу және теңдеулер жүйесінің глобал шешімнің болмауы сынақ функциялар әдісі арқылы дәлелденді.